ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ

Е.А. Еремеев

Студент факультета «Бизнес-информатика», СГУПС, г. Новосибирск

Аннотация: *в данной статье рассматривается применение метода Гаусса-Зейделя при оптимизации функции двух переменных путём нахождения её минимума. Происходит разбор алгоритма метода, и оптимизация функции с использованием программного обеспечения и путём решения вручную. Делается вывод, что результат оптимизации, выполненный вручную совпадает с результатом, полученным при использовании программного обеспечения.*

Ключевые слова: *метод Гаусса-Зейделя, функция, оптимизация функции, программное обеспечение.*

Введение

Оптимизация функции в математике, информатике и исследовании операций – это операция нахождения экстремума (максимума или минимума) функции в некоторой области конечного пространства. В общем случае оптимизацию можно описать как выбор компромиссного варианта для указанных свойств. Особое распространение методы оптимизации получили во второй половине 20 века, когда началось широкое распространение ЭВМ. Один из этих методов будет рассмотрен в данной статье.

Метод Гаусса-Зейделя

Метод Гаусса-Зейделя, также известный как метод покоординатного спуска является одним из методов оптимизации функций. В его основу положены принципы более раннего метода поочередного изменения переменных.

Суть данного метода заключается в том, что из начальной точки совершается шаг по первой переменной, если данный шаг является удачным, то продолжается движение в этом направлении, в противном случае, совершается шаг по другой переменной. Так продолжается до тех пор, пока шаги во всех направлениях не станут неудачными. После этого размер шага уменьшается, и обход начинается заново. Так происходит до тех пор, пока абсолютное значение величины шага не станет меньше или равно заданной точности [1, с. 12].

Алгоритм метода

Для некоторого начального значения $x^{(0)}$ иксируют все координаты вектора x, кроме одной (для определенности x1) и проводят операцию одномерного поиска минимума функции $F(x_1) = f(x_1, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ в результате чего получают точку $x_1 = x_1^*, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \dots x_n^{(0)}$, где $x_1^* = arg\ min_{x_1} F(x_1)$.

Фиксируя в точке x^1 все координаты кроме второй, повторяют по x_2. И так до последней составляющей x_n. Цикл алгоритма завершается после n – кратной операции одномерной оптимизации вдоль каждой из координат, после чего этот цикл повторяют, получая точки $x^1, x^2 \dots$, в каждой из которых значение целевой функции не больше, чем в предыдущей.

Условием прекращения вычислительной процедуры при достижении заданной точности ε может служить неравенство $\left\| x^k - x^{k-1} \right\| < \varepsilon$. При пошаговом движении, например, в алгоритме поочередного изменения переменных поиск прекращается в точке, для которой x^k совпало с x^{k-1}, т.е. цикл оказался нерезультативным. [2, с.196] На рисунке 1 изображён алгоритм работы метода Гаусса-Зейделя, а на рисунке 2 пример его работы.

*Рис.*1. Алгоритм метода Гаусса-Зейделя

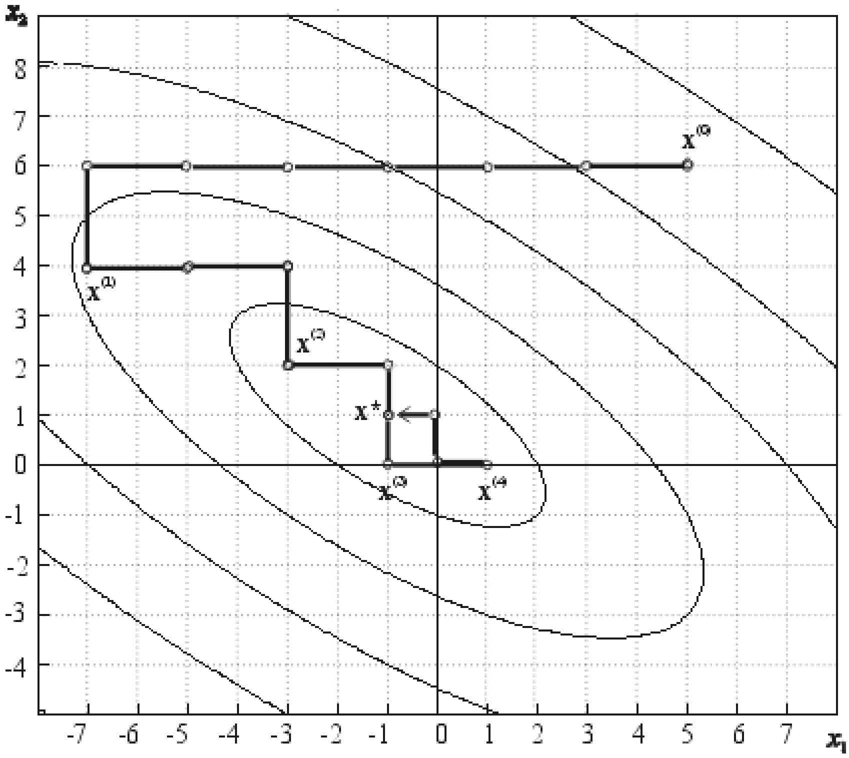

*Рис.*2. Иллюстрация работы метода Гаусса-Зейделя

Недостатком метода Гаусса-Зейделя является жесткое направление изменения каждой из составляющих решения, не зависящее от характера функции, что может привести к неоправданной остановке алгоритма в случае “овражных” функций. [3, с. 5]

Постановка задачи и решение при помощи ПО

В качестве примера была выбрана следующая задача: дана функция вида $(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 6)^2 + (x_1 - 7)(x_2 - 6)$, начальная точка $x_0 = (3; 2)$, величина шага $r = 2$, заданная точность $\lambda = 0{,}525$. Необходимо найти минимум этой функции методом Гаусса-Зейделя.

На рисунке 3 изображена программа с введёнными данными.

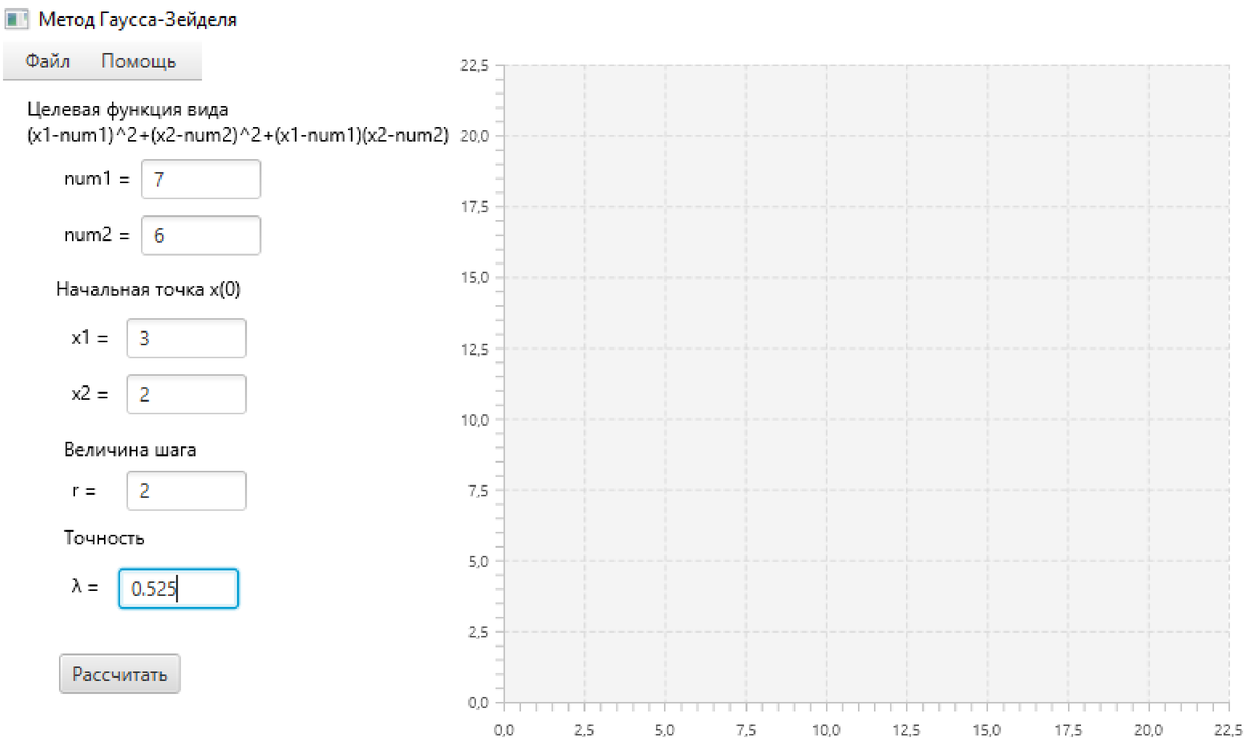

Рис.3. Внешний вид программы

На рисунке 4 изображён путь, который был пройден в результате оптимизации методом Гаусса-Зейделя.

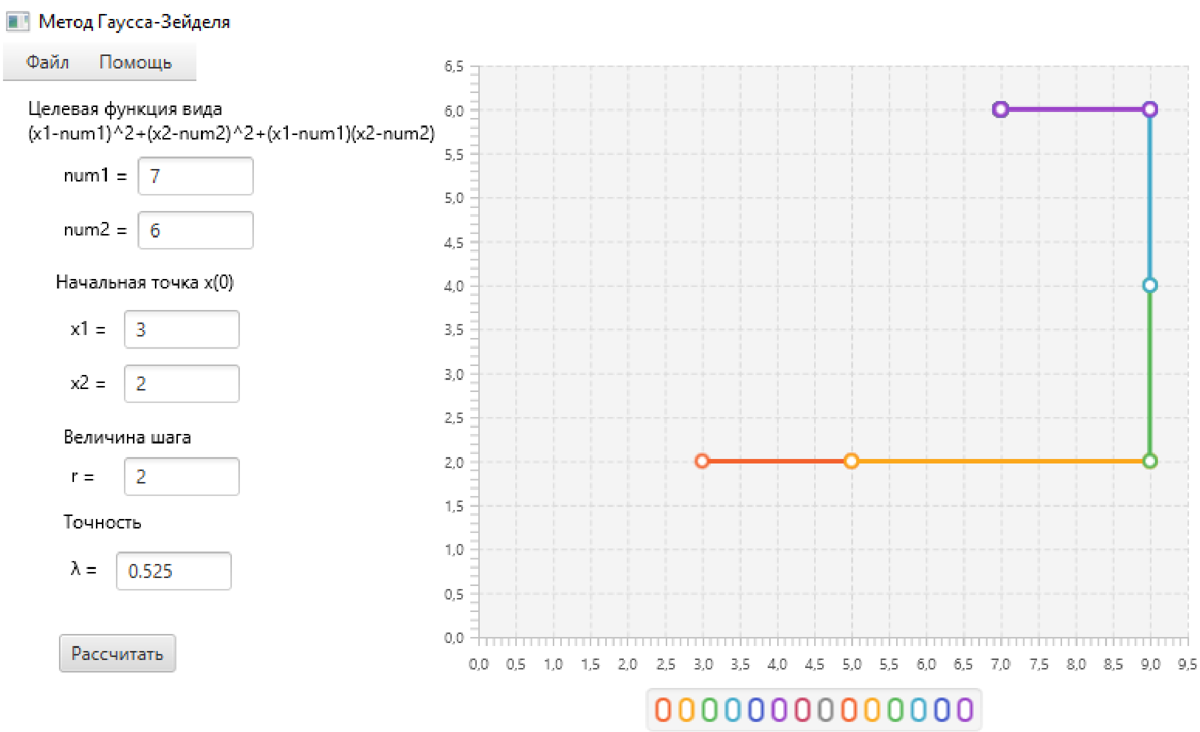

Рис.4. Оптимизация

Из этого графика следует, что минимум этой функции находится в точке $(7;6)$.

Решение методом Гаусса-Зейделя вручную

1-ая итерация

Значение функции в точке $(3;2) = 48$

Осуществляем одномерный поиск по координате x_1 при $x_2 = 2$

$x_1 = 3 + 2 = 5$

$f(x_1) = (5 - 7)^2 + (5 - 7)^2 + (5 - 7)(2 - 6) = 28$

Шаг удачный, продолжаем движение в этом направлении

$f(x_1) = 16$

$f(x_1) = 12$

$f(x_1) = 16$

Шаг неудачный, возвращаемся на шаг назад и движемся по другой координате

Осуществляем одномерный поиск по координате x_2 при $x_1 = 9$

$x_2 = 2 + 2 = 4$

$f(x_2) = (9 - 7)^2 + (4 - 6)^2 + (9 - 7)(4 - 6) = 4$

Шаг удачный, продолжаем движение в этом направлении

$f(x_2) = 4$

$f(x_2) = 16$

Шаг неудачный, возвращаемся на шаг назад и движемся по другой координате

Осуществляем одномерный поиск по координате x_1 при $x_2 = 6$

$x_1 = 9 + 2 = 11$

$f(x_1) = (11 - 7)^2 + (6 - 6)^2 + (11 - 7)(2 - 6) = 16$

Шаг неудачный, движемся в обратном направлении

$x_1 = 11 - 2 = 9$

$f(x_1) = (9 - 7)^2 + (6 - 6)^2 + (9 - 7)(2 - 6) = 4$

Шаг удачный, продолжаем движение в этом направлении

$f(x_1) = 0$

$f(x_1) = 4$

Шаг неудачный, возвращаемся на шаг назад и движемся по другой координате

Осуществляем одномерный поиск по координате x_2 при $x_1 = 7$

$x_2 = 6 + 2 = 8$

$f(x_2) = (7 - 7)^2 + (8 - 6)^2 + (7 - 7)(8 - 6) = 4$

Шаг неудачный, движемся в обратном направлении

$x_2 = 8 - 2 = 6$

$f(x_2) = (7 - 7)^2 + (6 - 6)^2 + (7 - 7)(4 - 6) = 0$

Шаг удачный, продолжаем движение в этом направлении

$f(x_2) = 4$

Шаг неудачный, возвращаемся на шаг назад и движемся по другой координате

Шаг неудачный. Так как все шаги неудачны, то уменьшаем размер шага. $r = 1,$ так как размер шага больше заданной точности, то продолжаем вычисления.

2-ая итерация

Значение функции в точке $(7; 6) = 0$

Осуществляем одномерный поиск по координате x_1 при $x_2 = 6$

$x_1 = 7 + 1 = 8$

$f(x_1) = (8 - 7)^2 + (6 - 6)^2 + (8 - 7)(6 - 6) = 1$

Шаг неудачный, движемся в обратном направлении

$x_1 = 8 - 1 = 7$

$f(x_1) = (7 - 7)^2 + (6 - 6)^2 + (7 - 7)(2 - 6) = 4$

Шаг удачный, продолжаем движение в этом направлении

$f(x_1) = 1$

Шаг неудачный, возвращаемся на шаг назад и движемся по другой координате

Осуществляем одномерный поиск по координате x_2 при $x_1 = 7$

$x_2 = 6 + 1 = 7$

$f(x_2) = (7 - 7)^2 + (7 - 6)^2 + (7 - 7)(7 - 6) = 1$

Шаг неудачный, движемся в обратном направлении

$x_2 = 7 - 1 = 6$

$f(x_2) = (7 - 7)^2 + (6 - 6)^2 + (7 - 7)(6 - 6) = 4$

Шаг удачный, продолжаем движение в этом направлении

$f(x_2) = 1$

Шаг неудачный. Так как все шаги неудачны, то уменьшаем размер шага. $r = 0.5,$ так как размер шага меньше заданной точности, то прекращаем вычисления.

При вычислении вручную следует что минимум функции – это точка $(7;6)$.

Заключение

Моя работа представляет из себя рассмотрение оптимизационного метода Гаусса-Зейделя, оптимизация заданной функции при помощи написанного мною программного обеспечения и сравнение этого результата с результатом вычисления вручную.

Согласно результатам вычислений, минимум, найденный при помощи программного обеспечения совпадает с минимумом, найденным при решении вручную, из чего следует, что возможно применение данной программы для оптимизации функций.

Список литературы

1 Зайцева Т.С., Новицкая И.А., Усова Э.А., Хабаров В.И. Исследование операций и методы оптимизации: Метод, указ.и задания к практическим занятиям. Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2007.

2 Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах, М: Изд. Высшая школа. 2005.

3 Шипилов С.А. МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ / НФИ КемГУ. – Новокузнецк. 2000