

Программное обеспечение для решения транспортных задач методом потенциалов

Аннотация: в статье раскрывается понятие алгоритма, дается подробное описание данного метода, а также приводится пример с его использованием в логистике (транспортных задачах). В статье приведена краткая характеристика решения конкретных транспортных задач.

Ключевые слова: Метод потенциалов, транспортная задача, программное обеспечение, алгоритм метода, математическая модель.

Транспортная задача получила широкое распространение в теоретических обработках и практическом применении на транспорте и в промышленности. Особенно важное значение она имеет в деле рационализации постановок важнейших видов промышленной и сельскохозяйственной продукции, а также оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта.

В данной работе представлен один из основных методов оптимизации задач транспортного типа.

Теория метода потенциалов

Этот первый точный метод решения транспортной задачи предложен в 1949 году Кантаровичем А. В. и Гавуриным М. К. Общий принцип определения оптимального плана транспортной задачи этим методом аналогичен принципу решения задачи линейного программирования симплексным методом, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Метод потенциалов относится к группе методов последовательного приближения. Вначале отыскивается исходный допустимый план перевозок, который, как правило, не является оптимальным, а затем по определенной итеративной процедуре этот план доводится до оптимального варианта. Если план оптимален – решение найдено.

Опорным, называется любой допустимый, как правило, не оптимальный план, который является исходным для последующего решения. Для построения опорного плана существует ряд методов. Самый простой из них – метод северо-западного угла.

U_i и V_i – потенциалы поставщиков и потребителей соответственно.

$$\begin{cases} U_i + V_i = C_{ij} \text{ для } x_{ij} > 0 \\ U_i + V_i \leq C_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0(*) \end{cases}, \quad i = \overline{1, m}; \quad \overline{1, n}$$

Для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке: $U_i + V_i = C_{ij}$. Для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единиц перевозки, стоящей в этой клетке: $U_i + V_i \leq C_{ij}$. Если хотя бы одна незанятая клетка не удовлетворяет условию, то в эту клетку надо переместить некоторое количество груза.

Клетки таблицы, в которые записаны отличные от нуля перевозки, называются базисными, а остальные (пустые) – свободными. План называется вырожденным, если количество базисных клеток в нем меньше, чем $m + n - 1$. Если во время решения задачи получился вырожденный план, то его необходимо пополнить, проставив в недостающем числе клеток нулевую перевозку и превратив, тем самым, эти клетки в базисные (общий баланс и суммарная стоимость перевозок плана при этом не изменятся). Однако проводить пополнение плана, выбирая клетки произвольно, нельзя. План должен быть ациклическим (его базисные клетки не содержат циклов – несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце).

Алгоритм метода потенциалов

Алгоритм решения транспортной задачи в текстовом представлении:

- построение транспортной таблицы;
- проверка задачи на закрытость;

- составление опорного плана методом минимального элемента;
- проверка опорного плана на вырожденность;
- вычисление потенциалов для плана перевозки;
- проверка опорного плана на оптимальность;
- перераспределение поставок;
- если оптимальное решение найдено, переходим к следующему пункту, если нет – вычисляем потенциалы для плана перевозок;
- вычисление общих затрат на перевозку груза.

Решение транспортной задачи

Заполним таблицу методом северо-западного угла, считаем сумму.

$$W = 21 * 15 + 5 * 10 + 5 * 13 + 13 * 14 + 9 * 7 + 14 * 9 + 7 * 23 + +12 * 25 + 4 * 3 + 16 * 1 = 1430$$

Действие представлено в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

15 21	10 5	6	25	11	12	26
13	13 5	14 13	20	27	30	18
16	22	7 9	19 14	10	21	23
1	25	29	23 7	25 12	18	19
13	10	4	22	3 4	1 16	20
21	10	22	21	16	16	106 106

Поскольку у нас ни в одной строке нет больше остальных заполненных ячеек, присваиваем нулевой потенциал той строке у которой наименьшая сумма c_{ij} и считаем остальные потенциалы. Совершаем проверку и отмечаем ячейки, не удовлетворяющие условию (7).

Таблица 3.2

15 21	10 5	6 L	25	11	12 L	26	u1= 22
13 L	13 5	14 13	20 L	27 L	30	18	u2= 25
16	22	7 9	19 14	10 L	21	23	u3= 18
1 L	25	29	23 7	25 12	18 L	19	u4= 22
13	10	4	22	3 4	1 16	20	u5= 0
21	10	22	21	16	16	106 106	
v1= -7	v2= -12	v3= -11	v4= 1	v5= 3	v6= 1		N=8

Приведем таблицу к оптимальному варианту решения транспортной задачи.

Таблица 3.3

15 21	10 5	6 L	25	11	12 L	26	u1= 22
13 L	13 5	14 13	20 L	27 L	30	18	u2= 25
16	22	7 9	19 14	10 L	21	23	u3= 18
1 L	25	29	23 7	25 12	18 L	19	u4= 22
13	10	4	22	3 4	1 16	20	u5= 0
21	10	22	21	16	16	106 106	
v1= -7	v2= -12	v3= -11	v4= 1	v5= 3	v6= 1		N=8

Заполняем грузом необходимые ячейки: переместим 9 единиц груза из ячейки (1,1) в ячейку (4,1), из ячейки (3,3) в ячейку (1,3) и из ячейки (4,5) в ячейку (3,5); переместим 12 единиц груза из ячейки (1,1) в ячейку (1,2), и из ячейки (2,3) в ячейку (1,3). Результат действий представлен в таблице 3.4.

Таблица 3.4

15	10	6	25	11	12	26	$u_1 = -8$
	5	21	L	L	L		
13	13	14	20	27	30	18	$u_2 = 0$
12	5	1	L				
16	22	7	19	10	21	23	$u_3 = -16$
			14	9			
1	25	29	23	25	18	19	$u_4 = -12$
9			7	3			
13	10	4	22	3	1	20	$u_5 = -23$
				4	16		
21	10	22	21	16	16	106	
						106	
$v_1 = 13$	$v_2 = 13$	$v_3 = 14$	$v_4 = 35$	$v_5 = 26$	$v_6 = 24$		$N = 4$

Заполняем грузом необходимые ячейки: переместим 7 единиц груза из ячейки (2,1) в ячейку (4,1), из ячейки (4,4) в ячейку (2,4); переместим 3 единицы груза из ячейки (2,1) в ячейку (4,1), и из ячейки (1,2) в ячейку (2,2) и из ячейки (4,5) в ячейку (1,5). Результат действий представлен в таблице 3.5.

Таблица 3.5. Опорный план

15	10	6	25	11	12	26	$u_1 = -8$
	2	21		3			
13	13	14	20	27	30	18	$u_2 = 0$
2	8	1	7				
16	22	7	19	10	21	23	$u_3 = -9$
			14	9			
1	25	29	23	25	18	19	$u_4 = -12$
19							
13	10	4	22	3	1	20	$u_5 = -16$
				4	16		
21	10	22	21	16	16	106	
						106	
$v_1 = 13$	$v_2 = 13$	$v_3 = 14$	$v_4 = 20$	$v_5 = 19$	$v_6 = 17$		$N = 0$

Все пустые ячейки удовлетворяют этому условию, таблица является опорным планом, поэтому считаем полную сумму поставки.

Экономическая эффективность равна:

$$W = 2 * 10 + 21 * 6 + 3 * 11 + 2 * 13 + 8 * 13 + 1 * 14 + 7 * 20 + 14 * 19 + 9 * 10 + 19 * 1 + 4 * 3 + 16 * 1 = 866$$

Таблица 3.6.

15		10	6	25		11	12	26
13	2	13	14	20	27	30	18	
16		22	7	19	10	21	23	
1		25	29	23	25	18	19	
19		10	4	22	3	1	20	
					4	16		
21	10	22	21	16	16	16	106	106

Возможные экономии:

$$\mathfrak{A}_1 = ((13 - 10) + (19 - 20) + (11 - 10)) * 3 = 9$$

$$\mathfrak{A}_2 = ((14 - 6) + (19 - 20) + (11 - 10)) * 1 = 8$$

$$\mathfrak{A}_3 = ((13 - 10) + (6 - 7) + (19 - 20)) * 8 = 8$$

$$\mathfrak{A}_4 = ((14 - 13) + (10 - 6)) * 1 = 5$$

Объединим 1 и 4 экономию, учитывая взаимосвязь между друг другом.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_5 &= ((13 - 10) + (19 - 20) + (11 - 10)) * 3 + ((14 - 13) + (10 - 6)) * 1 \\ &= 9 + 5 = 14 \end{aligned}$$

Результат представлен в таблице 3.7.

Таблица 3.7

15		10	6	25	11	12	26
13	4	13	14	20	27	30	18
2	6			10			
16		22	7	19	10	21	23
1		25	29	23	25	18	19
19		10	4	22	3	1	20
					4	16	
21	10	22	21	16	16	16	106

Экономическая эффективность равна:

$$W = 4 * 10 + 22 * 6 + 2 * 13 + 6 * 13 + 10 * 20 + 19 * 11 + 12 * 10 + 19 * 1 + 4 * 3 + 16 * 1 = 852$$

Возможные экономии:

$$\Xi_6 = ((13 - 10) + (6 - 7) + (19 - 20)) * 6 = 6$$

Результат представлен в таблице 3.8.

Таблица 3.8. Оптимальный план

15	10	6	25	11	12	26
	10	16				
13	13	14	20	27	30	18
2			16			
16	22	7	19	10	21	23
		6	5	12		
1	25	29	23	25	18	19
19						
13	10	4	22	3	1	20
				4	16	
21	10	22	21	16	16	106
						106

Математическая модель:

$$W = 10*10+16*6+2*13+16*20+6*7+5*19+12*10+19*1+4*3+16*1=846$$

Получен оптимальный план, экономическая эффективность которого равна 846.

Оптимизация составила:

$$866 - 846 = 20 \text{ единиц.}$$

Работа программы

Внешний вид программы представлен на рисунке 1.

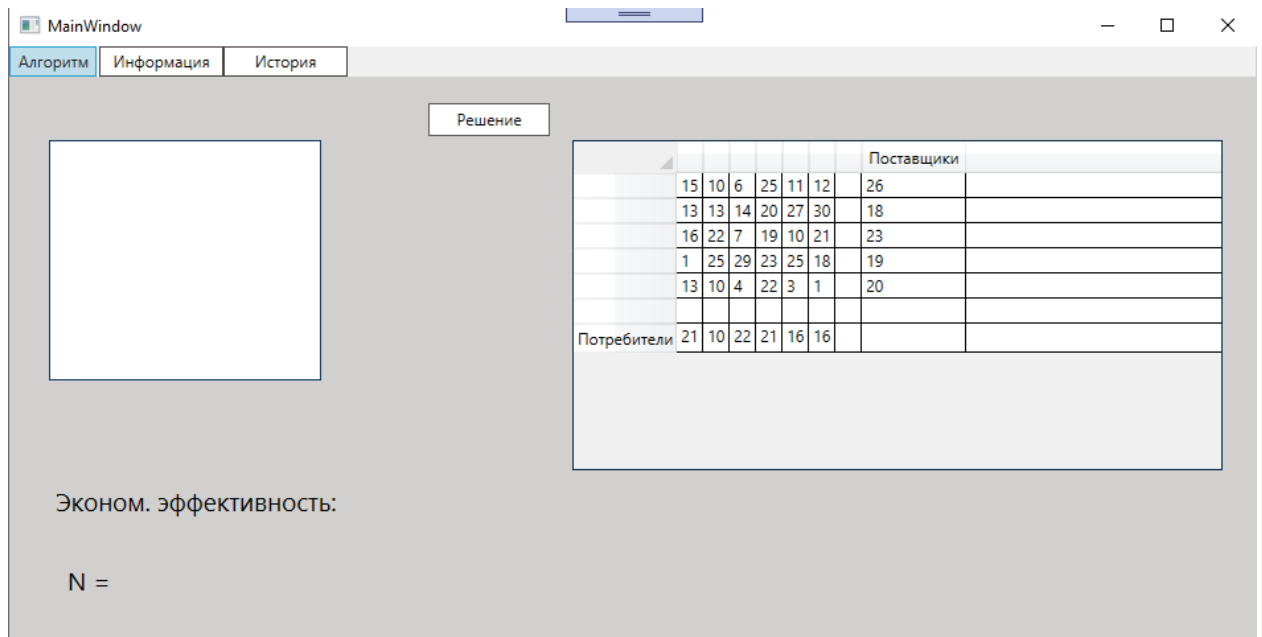


Рисунок 1 – Окно программы

Программа выполнена в виде приложения с дизайном. При нажатии на кнопку «Решение» происходит процесс решения транспортной задачи: составление опорного плана и распределение поставок методом потенциалов. Процесс работы программы представлен на рисунке 2.

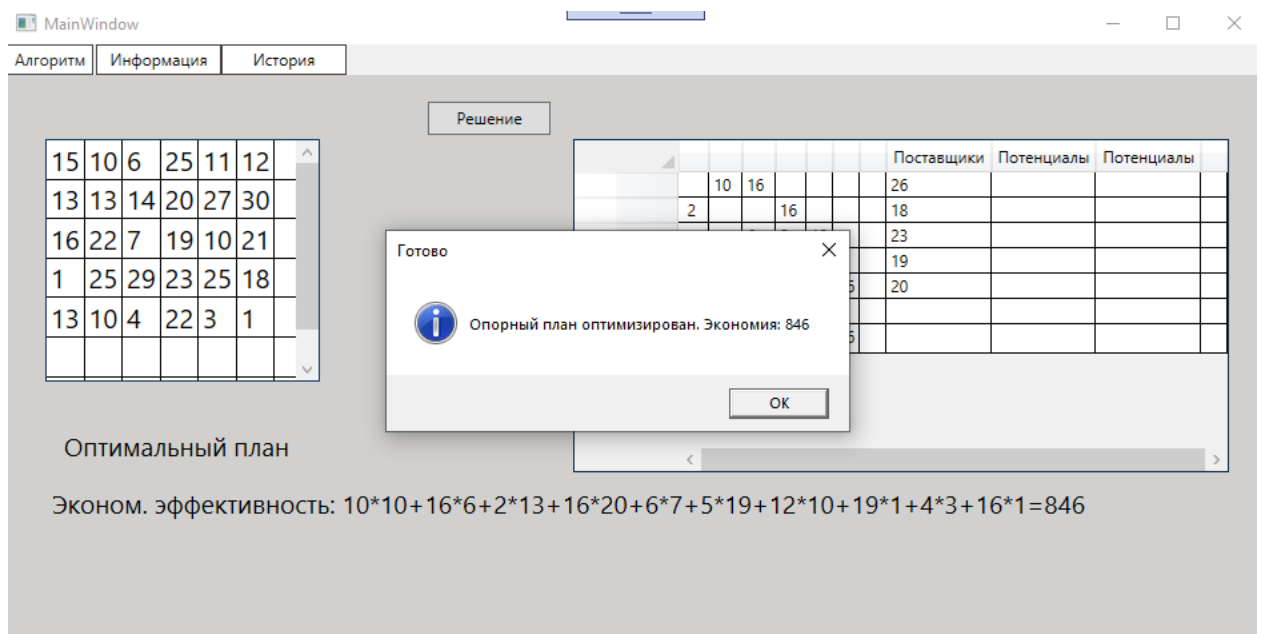


Рисунок 2 – Работа программы

При нажатии на меню кнопки «История» появляется окно с историей создания метода (рисунок 3).

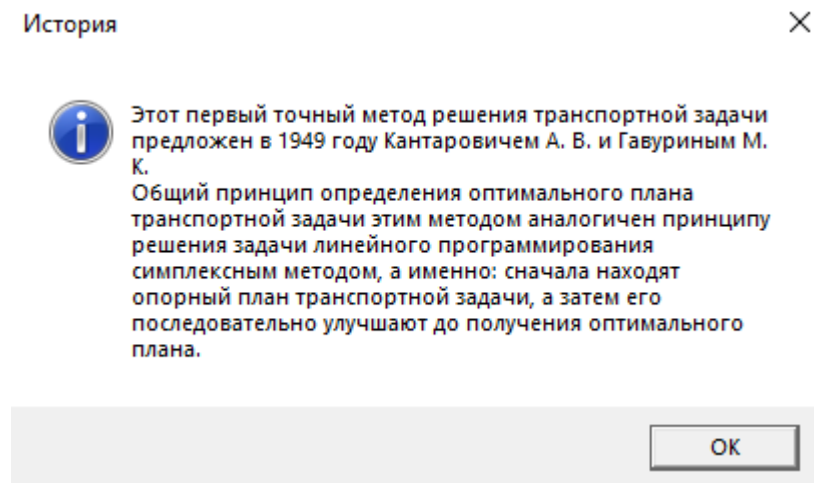


Рисунок 3 – Окно с историей создания метода

При нажатии на меню кнопки «Алгоритм» появляется окно с алгоритмом программы (рисунок 4).

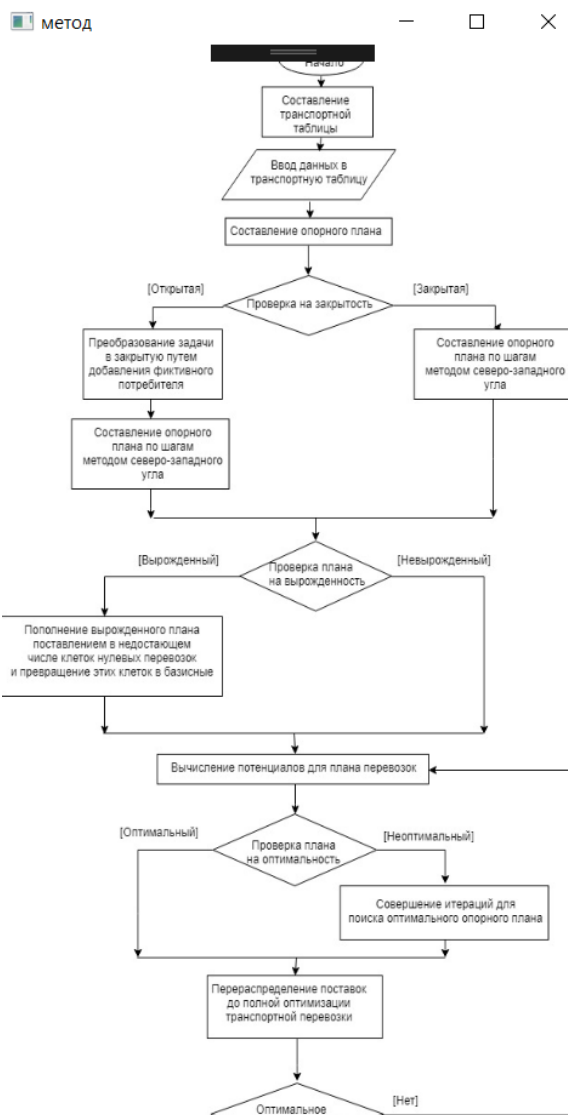


Рисунок 4 – Окно метода

В программе реализован дружественный интерфейс, который сопровождается доступными таблицами, кнопками и справками по реализации программы. Тестирование продукта продемонстрировало правильность реализации программы. Полученные результаты программы сошлись со значениями, полученными при решении задачи вручную методом потенциалов.

Данное разработанное программное обеспечение в дальнейшем может служить программой для быстрого вычисления транспортной задачи методом потенциалов студентами.

Список используемых источников

- 1 Соболев Б.В., Месхи Б.Ч., Каныгин Г.И. Методы оптимизации. Практикум. Ростов-на-Дону: Феникс, 2009.
- 2 Пантелеев А.В., Летова Т.А.. Методы оптимизации в примерах и задачах, М: Изд. Высшая школа. 2005.
- 3 Зайцева Т.С., Новицкая И.А., Усова Э.А., Хабаров В.И. Исследование операций и методы оптимизации: Метод, указ.и задания к практическим занятиям. Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2007.;
- 4 Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций: Учебник / Под общ. Ред. Д.э.н., проф. Н.П. Тихомирова. – М.: Издательство «Экзамен», 2003. – 448с.;
- 5 Зайченко Ю.П. Исследования операций. Киев: Высш. Шк., 1975.;
- 6 Вентцель Е.С. Исследование операций. М., 1972.